Mihai Monea
Steluța Monea
Ioan Șerdean
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2020

Matematică

M_șt-nat

M_tehnologic

Teme recapitulative

40 de teste, după modelul M.E.N.

(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45

Cuprins

Cuvânt-înainte 4

Enunțuri Soluții

TEME RECAPITULATIVE

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică 5 214
2. Șiruri. Progresii 10 215
3. Funcții 15 216
4. Funcția de gradul I 21 217
5. Funcția și ecuația de gradul al II-lea 25 217
6. Vectori în plan 30 218
7. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie 35 219

Clasa a X-a

1. Numere reale 41 221
2. Funcții și ecuații 44 222
3. Probleme de numărare și combinatorică 52 223
4. Matematici aplicate. Probabilități 55 223
5. Geometrie analitică 60 224
6. Numere complexe* 65 225

Clasa a XI-a

1. Matrice 69 226
2. Determinanți 76 227
3. Aplicații ale determinanților în geometrie 81 227
4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale 84 228
5. Sisteme de ecuații liniare 89 229
6. Probleme de sinteză – algebră 95 230
7. Limite de funcții. Asimptote 99 233
8. Funcții continue 104 233
9. Derivata unei funcții 109 234
10. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor 116 235
11. Probleme de sinteză – analiză matematică 120 236

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziţie 123 238
2. Structuri algebrice. Morfisme 128 238
3. Polinoame 133 239
4. Probleme de sinteză – algebră 140 239
5. Primitive 143 241
6. Integrala definită 149 242
7. Aplicaţii ale integralei definite 153 243
8. Probleme de sinteză – analiză matematică 158 244

TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.N.

1. MODELE DE TESTE REZOLVATE PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT 163 246

2. MODELE DE TESTE PROPUSE PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT 201

Bibliografie 269

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. Noțiuni teoretice

1.1.1. Elemente de logică matematică

Definiție: Se numește **propoziție** un enunț despre care știm care este valoarea sa de adevăr.

Variabile	Operație	Notație	Citire	Valoare de adevăr
p	Negația	$\neg p$	non p	Opusă propoziției p.
p, q	Conjuncția	$p \wedge q$	p și q	Este adevărată când propozițiile p și q sunt adevărate.
p, q	Disjuncția	$p \vee q$	p sau q	Este adevărată când cel puțin una dintre propoziții este adevărată.
p, q	Implicația	$p \to q$	p implică q	Este falsă când p este adevărată și q falsă.
p, q	Echivalența	$p \leftrightarrow q$	p echivalent cu q	Este adevărată când ambele au aceeași valoare de adevăr.

Definiție: Se numește **predicat** un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care se transformă în propoziție prin valori date variabilelor.

Variabile	Operație	Notație	Citire	Observații
$p(x)$	Propoziția universală	$\forall x, p(x)$	Pentru orice x are loc $p(x)$.	Demonstrarea valorii de adevăr se face prin calcule cu caracter general și nu prin exemplu. Un exemplu poate fi suficient pentru a demonstra că această propoziție este falsă.

$p(x)$	Propoziția existențială	$\exists x,\ p(x)$	Există x astfel încât are loc $p(x)$.	Demonstrarea valorii de adevăr se realizează prin determinarea unui exemplu. Acesta poate fi chiar ghicit, dar trebuie verificat că este convenabil.

1.1.2. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicație de tipul $p \to q$, putem presupune concluzia p ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza construim un raționament care conduce la contradicție.

Metoda inducției matematice: Se aplică pentru propoziții universale de forma $\forall n \geq n_0,\ p(n)$. Se verifică valoarea de adevăr a propoziției obținute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziția obținută în cazul $n = k$ și se demonstrează valoarea de adevăr a propoziției obținute pentru $n = k+1$.

1.1.3. Mulțimi și cardinale

Relație sau operație	Notație	Definiție
Incluziunea	$A \subset B$	$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$
Egalitatea	$A = B$	$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A$
Intersecția	$A \cap B$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Reuniunea	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Diferența	$A \setminus B$	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Produsul cartezian	$A \times B$	$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Teoremă: Orice mulțime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulțimi.

Definiție: Pentru o mulțime finită A numim **cardinalul** său și notăm Card (A) numărul său de elemente.

Proprietăți: Sunt adevărate următoarele proprietăți:

P1. Card $(A) = 0$ dacă și numai dacă $A = \varnothing$;

P2. Dacă $A \subset B$, atunci Card $(B - A)$ = Card (B) − Card (A);

P3. Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) − Card $(A \cap B)$;

P4. Card $(A \times B)$ = Card $(A) \cdot$ Card (B).

1.1.4. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Definiție: Numim **modulul** unui număr real x și notăm $|x|$ distanța de la originea axelor la poziția numărului pe axă.

Proprietățile modulului:

P1. $|x| \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$; **P2.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; **P3.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;

P4. $|x|<c,\ c>0 \Leftrightarrow x\in(-c;\ c)$; **P5.** $|x|>c,\ c>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\ -c)\cup(c;\ \infty)$;

P6. $|x|=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x<0 \end{cases}$ și $|E(x)|=\begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x)\geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x)<0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x),\ x\in\mathbb{R}$;

P7. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$; **P8.** $|x^n|=|x|^n,\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z}$;

P9. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|},\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^*$; **P10.** $\big||x|-|y|\big|\leq|x\pm y|\leq|x|+|y|,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

Definiție: Numim **parte întreagă** a numărului real x și notăm $[x]$ cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x.

Proprietățile părții întregi: Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $[x]=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$; **P2.** $[x]=k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in[k,\ k+1)$;

P3. $[m+x]=m+[x],\forall\ m\in\mathbb{Z}$; **P4.** $x-1<[x]\leq x<[x]+1$.

Definiție: Numim **parte fracționară** a numărului real x și notăm $\{x\}$ diferența dintre număr și partea sa întreagă.

Proprietățile părții fracționare: Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $\{x\}=0\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$; **P2.** $\{x\}\in[0,1)$; **P3.** $\{m+x\}=\{x\},\forall\ m\in\mathbb{Z}$.

1.2. Probleme de inițiere

I1. Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A=\{a, b, c, d\}$.

I2. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A=\{a, b, c, d, e\}$.

I3. Reuniunea a două mulțimi cu câte 20 de elemente fiecare are 30 de elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.

I4. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $p:\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2\in\mathbb{N}$.

I5. Fie propozițiile $p: 2+2=5$ și $q: 1+2+3+\ldots+100=5050$. Precizați valoarea de adevăr a propoziției $p\vee q$.

I6. Determinați numerele reale a, b dacă avem egalitatea de intervale: $[a-b;\ a+b]=[1;\ 7]$.

I7. Fie $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii: $B=\{x\in\mathbb{R}\ |\ x=(n-1)\cdot(n-2)(n-3)+4,\ n\in A\}$.

I8. Determinați intersecția mulțimilor $A=(1,\ 5)$ și $B=[3,\ 11]$.

I9. Arătați că numărul $a=2\cdot[0,(3)+0,1(6)]$ este natural.

I10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x-2|=5$.

1.3. Probleme de consolidare

C1. Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui A care îl conțin pe d.

C2. O mulțime admite 31 de submulțimi nevide. Determinați numărul de elemente ale acestei mulțimi.

C3. Două mulțimi cu câte 2008 elemente fiecare au 1000 de elemente comune. Determinați numărul de elemente ale reuniunii lor.

C4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinați numărul de submulțimi care conțin simultan pe 1 și pe 3.

C5. Considerăm propozițiile $p : 2^5 > 5^2$ și $q : \sqrt{7} > 2$. Precizați valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge q$.

C6. Determinați elementele mulțimii $\left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{6}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

C7. Determinați toate valorile reale ale numărului x dacă $2 \in (4x - 2; 2x + 6)$.

C8. Elevii unei clase sunt angrenați fiecare într-o activitate sportivă, 12 la volei, iar 25 la fotbal. Știind că 7 dintre ei practică ambele sporturi, determinați numărul de elevi ai clasei.

C9. Determinați cel mai mare număr natural al mulțimii $A \setminus B$, dacă $A = [5, 6]$ și $B = [5, 10]$.

C10. Determinați câte elemente întregi conține mulțimea $A \cup B$, unde $A = (-2, 3)$ și $B = (0, 5)$.

C11. Ordonați crescător numerele $a = 2{,}010$, $b = 2{,}0(10)$ și $c = 2{,}(010)$.

C12. Determinați cardinalul mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{2}{x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

C13. Fie numărul rațional $\frac{11}{9} = 1,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Calculați $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10}$.

C14. Fie numărul rațional $\frac{13}{6} = 2,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$. De câte ori apare cifra 3 printre cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$?

C15. Se consideră numărul rațional $\frac{23}{15} = 0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Calculați: $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$.

C16. Determinați cardinalul mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$, unde $A = (-3, 4]$, iar $B = (1, 5]$.

C17. Fie numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media geometrică a numerelor a și b.

C18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|1-2x| = |x+4|$.

C19. Demonstrați că numărul $\left|2-\sqrt{5}\right| + \left|3-\sqrt{5}\right|$ este număr natural.

C20. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $|3x-2| = 11$.

C21*. Calculați $\left[\frac{17}{5}\right] + \left\{\frac{11}{6}\right\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x.

C22*. Determinați partea întreagă a numărului $a = \sqrt{17}$.

C23*. Determinați partea fracționară a numărului $b = \sqrt{25} + \sqrt{26}$.

C24*. Se consideră numărul $A = \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$. Demonstrați că $A \in \mathbb{N}$.

C25*. Arătați că $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este număr natural.

C26*. Demonstrați egalitatea $\left[\sqrt{3}+\sqrt{25}\right] = \left[\sqrt{4}+\sqrt{19}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

C27*. Demonstrați prin inducție matematică că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea: $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

C28*. Demonstrați prin inducție matematică că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

C29*. Demonstrați că numărul $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este irațional.

C30*. Arătați că, pentru orice număr natural n diferit de zero, fracția $\frac{2n-1}{2n+1}$ este ireductibilă.

1.4. Teste de verificare

Testul 1

1. Determinați elementele mulțimii $A \cap B$ dacă $A = (2003,\ 2015)$ și $B = (2014,\ 2016)$.

2. Calculați suma $|-3| + |-5| \cdot 2$.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției $p: \sqrt{4} + \sqrt{36} = \sqrt{64}$.

4. Câte submulțimi ale mulțimii $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ conțin doar numere impare?

5. Ordonați crescător numerele $a = \sqrt{4} - 4$, $b = \sqrt{9} - 9$ și $c = \sqrt{16} - 16$.

6. Demonstrați că numărul $A = \left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{5}\right)^2$ este natural.

Testul 2*

1. Determinați cel mai mic număr întreg al mulțimii $A \cap B$ dacă $A = (2010, 2016)$ și $B = (2013,\ 2020)$.

2. Determinați partea întreagă a numărului $x = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$.

3. Se consideră predicatul $p(x): \dfrac{2x+1}{2x}$, unde $x \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că propoziția $\exists\, x \in \mathbb{N}^*,\ p(x) \in \mathbb{N}$ este falsă.

4. Comparați numerele $a = 5\sqrt{3}$ și $b = 3\sqrt{7}$.

5. Numărul rațional $\dfrac{5}{4} = \overline{1,a_1a_2a_3...a_n...}$. Calculați suma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014}$.

6. Demonstrați prin inducție matematică că egalitatea $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Șiruri. Progresii

2.1. Noțiuni teoretice

2.1.1. Șiruri

Terminologie:

- Vom nota cu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mulțimea termenilor șirului;
- x_n reprezintă al n-lea termen al șirului.

Forme de prezentare:

- Prin enumerarea termenilor, de exemplu șirul 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...;

- Prin formula termenului general, de exemplu șirul $x_n = \dfrac{2n+1}{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
- Prin formulă de recurență, de exemplu șirul $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = 3x_n - 2 \end{cases}$.

2.1.2. Progresii aritmetice

Definiție: Se numește **progresie aritmetică** un șir de numere cu proprietatea că fiecare termen începând cu al doilea se obține din precedentul adunând aceeași cantitate constantă numită *rație*.

Proprietăți: Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu rația r. Atunci:

P1. $a_{n+1} = a_n + r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

P2. $a_n = a_1 + (n-1)r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

P3. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$;

P4. Dacă $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, atunci $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

2.1.3. Progresii geometrice

Definiție: Se numește **progresie geometrică** un șir de numere nenule cu proprietatea că fiecare termen începând cu al doilea se obține din precedentul prin înmulțirea cu aceeași cantitate constantă numită *rație*.

Proprietăți: Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică cu rația q. Atunci:

P1. $b_{n+1} = b_n q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

P2. $b_n = b_1 q^{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

P3. $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$;

P4. Dacă $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$ și $q \neq 1$, atunci $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$.

2.2. Probleme de inițiere

I1. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere oarecare astfel încât $x_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați x_{10}.

I2. Determinați primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, 21, \dots$.

I3. Într-o progresie aritmetică cu rația 3, avem $a_1 = 2$. Calculați a_5.

I4. Într-o progresie aritmetică cu rația 5, avem $a_8 = 70$. Calculați a_1.

I5. Într-o progresie aritmetică cu rația 4, avem $a_6 = -13$. Calculați a_{10}.

I6. Într-o progresie aritmetică cu $a_1 = 7$, avem $a_7 = 25$. Determinaţi raţia progresiei.

I7. Într-o progresie geometrică cu raţia -1, avem $b_1 = 5$. Calculaţi b_{2014}.

I8. Într-o progresie geometrică cu raţia 2, avem $b_7 = 56$. Calculaţi b_6.

I9. Într-o progresie geometrică cu raţia $\frac{1}{2}$, avem $b_3 = 64$. Calculaţi b_7.

I10. Într-o progresie aritmetică, avem $a_1 = 2$ şi $a_{20} = 98$. Calculaţi suma: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{20}$.

2.3. Probleme de consolidare

C1. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir astfel încât $x_n = \frac{3n+1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi suma $x_1 + x_3 + x_5 + x_7$.

C2. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir astfel încât $x_n = 4n-3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi al câtelea termen al şirului este numărul 37.

C3. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $a_5 = 24$ şi $a_9 = 76$. Calculaţi a_7.

C4. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $a_2 = 7$ şi $a_{10} = 15$. Calculaţi a_{2008}.

C5. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de raţie 2, în care $a_3 + a_4 = 8$. Determinaţi a_1.

C6. Stabiliţi dacă numărul 2007 aparţine progresiei aritmetice 2, 7, 12, 17, ...

C7. Determinaţi primul termen al unei progresii geometrice b_1, b_2, 18, 54, 162, ...

C8. Într-o progresie geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu raţia negativă, avem $a_2 = 3$ şi $a_4 = 147$. Determinaţi a_3.

C9. Determinaţi numărul real x, ştiind că numerele 2, x şi $x + 4$ sunt în progresie aritmetică.

C10. Într-o progresie geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $a_2 = 5$ şi $a_5 = 40$. Determinaţi a_1.

C11. Într-o progresie geometrică cu termeni pozitivi, suma primilor doi termeni este 4, iar a următorilor doi termeni este 36. Determinaţi primul termen al progresiei.

C12. Demonstraţi că, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, numerele $x - 1$, $2x + 3$ şi $3x + 7$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

C13. Determinaţi numărul real pozitiv x, ştiind că x, 6 şi $x - 5$ sunt în progresie geometrică.